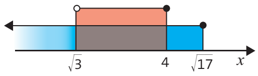
1 Teste de Avaliação

pp. 12-14

Caderno 1

1. Opção (D).



$]-\infty, \sqrt{17}] \cap]\sqrt{3}, 4] =]\sqrt{3}, 4]$

2. $\sqrt{70} \approx 8{,}4$ (1 c.d.)

Logo, $n = 9$.

$-\frac{12}{5} = -2{,}4$

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Os elementos do conjunto $\left[-\frac{12}{5}, n\right] \cap \mathbb{Z}$ são $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

3. $1{,}9 < a < 2{,}1$ e $2{,}8 < \sqrt{b} < 3{,}2$

Então, $5{,}6 < 2\sqrt{b} < 6{,}4$.

Logo, $7{,}5 < a + 2\sqrt{b} < 8{,}5$.

O erro máximo é 0,5.

4.

4.1. $\frac{3}{2} \times 4 = 6$

Logo, 6 é a constante de proporcionalidade inversa.

Assim, $f(x) = \frac{6}{x}$.

4.2. $f(12) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Logo, o ponto de coordenadas $\left(12, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de f.

Opção (D).

5.

5.1. $\frac{700}{20} = 35$

Cada amiga fica com 35 €.

5.2. O produto entre o número de amigas com autorização para a viagem e a quantia que coube a cada amiga é constante e igual a 700 €. A constante de proporcionalidade, 700 €, corresponde à quantia angariada pelas amigas.

Caderno 2

6. Como $a < b$ e $5 < 6$, pelas relações de ordem em $\mathbb{R}$, vem que $a + 5 < b + 6$.

Opção (C).

7. $\frac{x}{2} + 3 < 2x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow \underset{(\times 5)}{\frac{x}{2}} + \underset{(\times 10)}{\frac{3}{1}} < \underset{(\times 10)}{\frac{2x}{1}} + \underset{(\times 2)}{\frac{3}{5}}$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{10} + \frac{30}{10} < \frac{20x}{10} + \frac{6}{10}$

$\Leftrightarrow 5x + 30 < 20x + 6$

$\Leftrightarrow -15x < -24$

$\Leftrightarrow x > \frac{24}{15}$

$\Leftrightarrow x > \frac{8}{5}$

C.S. $= \left]\frac{8}{5}, +\infty\right[$

8. Considerando $a = -1$:

$2 \times (-1) < 10 \times (-1)$

$\Leftrightarrow -2 < -10$, que é falso.

9. $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$

C.S. $=]1, +\infty[$

Opção (A).

10.

10.1. $d(n) = 35 + 10n$

10.2. $d(n) > 200 + 17 \Leftrightarrow 35 + 10n > 217$

$\Leftrightarrow 10n > 217 - 35$

$\Leftrightarrow 10n > 182$

$\Leftrightarrow n > \frac{182}{10}$

São necessários 19 dias.

11. $4 - \frac{x-2}{2} > 10 \ \wedge \ 4 - \frac{x-2}{2} < 15$

$\Leftrightarrow 8 - x + 2 > 20 \ \wedge \ 8 - x + 2 < 30$

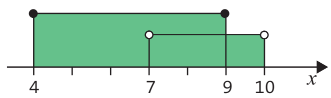
$\Leftrightarrow -x > 10 \ \wedge \ -x < 20$

$\Leftrightarrow x < -10 \ \wedge \ x > -20$

$\Leftrightarrow -20 < x < -10$

$x \in]-20, -10[$

12.



$[4, 9] \cup]7, 10[= [4, 10[$

Opção (D).

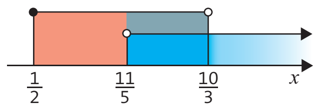
13.

13.1. $5x - 1 > 10 \Leftrightarrow 5x > 11$

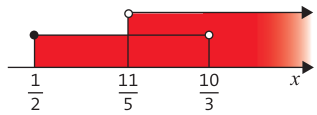
$\Leftrightarrow x > \frac{11}{5}$

$A = \left]\frac{11}{5}, +\infty\right[$

13.2. $A \cap B = \left]\frac{11}{5}, \frac{10}{3}\right[$



13.3. $A \cup B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$



14. $0{,}2 \times 10 = 20$; $4 \times 6 = 24$

Como $20 \neq 24$, conclui-se que as variáveis x e y não são inversamente proporcionais.

15.

15.1. Como a constante de proporcionalidade inversa é 3, então a expressão algébrica que define a função f é $f(x) = \frac{3}{x}$.

15.2. Sabe-se que a ordenada do ponto B é $\frac{3}{5}$:

$f(x) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = 5$

Donde, $B\left(5, \frac{3}{5}\right)$ e $A\left(0, \frac{3}{5}\right)$.

Assim, $\overline{AB} = 5$.

Sabe-se que a abcissa do ponto C é 1:

$f(1) = \frac{3}{1} = 3$

Donde, $C\,(1, 3)$ e $D(0, 3)$.

Assim, $\overline{AD} = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{AD} = \frac{5+1}{2} \times \frac{12}{5} = 3 \times \frac{12}{5} = \frac{36}{5}$$

A área do trapézio $[ABCD]$ é $\frac{36}{5}$ u.a.

2 Teste de Avaliação

pp. 15-17

Caderno 1

1. $-1, 0, 1, 2, 3, 4$

2.

2.1. $\frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$

A constante de proporcionalidade direta é 0,25 e representa o custo por minuto de conversa.

2.2. $\frac{1{,}5}{x} = 0{,}25 \Leftrightarrow x = \frac{1{,}5}{0{,}25}$

$\Leftrightarrow x = 6$

A chamada durou seis minutos.

2.3.

n	10	15	**20**	30
***S*(*n*)**	17,5	**16,25**	16,25	**12,5**

$10 \times 17{,}5 = 175$; $15 \times 16{,}25 = 243{,}75$

Como $175 \neq 243{,}75$, não se trata de uma função de proporcionalidade inversa.

3. A função $f(x) = \frac{4}{x}$, $x \neq 0$ é uma função de proporcionalidade inversa, pelo que o seu gráfico é um "ramo de hipérbole".

Opção (B).

4.

4.1. Como a concavidade do gráfico de f é voltada para baixo, conclui-se que $a < 0$.

4.2. $A_{[ABCD]} = 48 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = 48$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{48}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = 12$

Sabe-se que f é uma função quadrática do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$, logo:

$f(2) = -12 \Leftrightarrow a \times 2^2 = -12 \Leftrightarrow a = -3$

Logo, a expressão algébrica que define a função f é $f(x) = -3x^2$.

5. $x^2 - 4 = 2\sqrt{3}$

$\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 4 = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, que é verdadeiro.

Logo, $1 + \sqrt{3}$ é solução da equação $x^2 - 4 = 2\sqrt{3}$.

Opção (A).

6. Como f é uma função quadrática, com expressão algébrica $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ e $(-1, 2)$ pertence ao gráfico de f, então $f(-1) = 2$. Como $f(1) = f(-1)$, então $f(1) = 2$.

Como g é uma função de proporcionalidade inversa e $(1, 4)$ pertence ao gráfico de g, vem que a constante de proporcionalidade inversa é:

$1 \times g(1) = 1 \times 4 = 4$

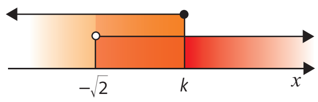
Logo:

$g(4) \times 4 = 4 \Leftrightarrow g(4) = 1$

$\frac{f(1)}{2} - \sqrt{g(4)} = \frac{2}{2} - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$

Caderno 2

7.



$]-\infty, k] \cap]-\sqrt{2}, +\infty[=]-\sqrt{2}, k]$

Opção (B).

8. $\frac{-x-1}{3} \geqslant -(4x + 15) \Leftrightarrow \frac{-x-1}{3} \geqslant -4x - 15$

$\Leftrightarrow -x - 1 \geqslant -12x - 45$

$\Leftrightarrow -x + 12x \geqslant -45 + 1$

$\Leftrightarrow 11x \geqslant -44$

$\Leftrightarrow x \geqslant -4$

C.S. $= [-4, +\infty[$

9. $125 + 70n \leq 475 \Leftrightarrow 70n \leq 350$

$\Leftrightarrow n \leq \frac{35}{7}$

$\Leftrightarrow n \leq 5$

No máximo, podem ter ido cinco pessoas, pelo que, no máximo, o Nuno foi com quatro amigos.

10.

10.1. O conjunto-solução da equação $2x^2 - 4x - 30 = 0$ é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção da parábola de equação $y = 2x^2$ com a reta de equação $y = 4x + 30$.

Logo, $A(-3, y_A)$ e $B(5, y_B)$.

$g(-3) = 4 \times (-3) + 30 = 18$

$g(5) = 4 \times 5 + 30 = 50$

Assim, $A(-3, 18)$ e $B(5, 50)$.

10.2. $h(x) = -2x^2$

11. $A_{[OABC]} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Opção (D).

12. $7(x-1)+1=-3x^2 \Leftrightarrow 7x-7+1+3x^2=0$

$$\Leftrightarrow 3x^2+7x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\times3\times(-6)}}{2\times3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{2\times3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm11}{6}$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \ \vee \ x=\frac{2}{3}$$

C.S. $=\left\{-3, \frac{2}{3}\right\}$

13.

13.1. Uma equação de 2.º grau tem duas soluções se o binómio discriminante for positivo:

$$b^2-4ac>0 \Leftrightarrow (-3)^2-4\times1\times9k>0$$

$$\Leftrightarrow 9-36k>0$$

$$\Leftrightarrow -36k>-9$$

$$\Leftrightarrow k<\frac{9}{36}$$

$$\Leftrightarrow k<\frac{1}{4}$$

$k\in\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$

13.2. Se $k=1$:

$b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times9\times1=-27$

Como $b^2-4ac<0$, vem que a equação não tem soluções.

14. $(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

Opção (A).

15.

15.1. $49x^2-64=(7x-8)(7x+8)$

15.2. $49x^2-64=0 \Leftrightarrow (7x-8)(7x+8)=0$

$$\Leftrightarrow 7x-8=0 \ \vee \ 7x+8=0$$

$$\Leftrightarrow 7x=8 \ \vee \ 7x=-8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8}{7} \ \vee \ x=-\frac{8}{7}$$

C.S. $=\left\{-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right\}$

16.

16.1. $\begin{cases} 30+x\le 40 \\ 20+2x\le 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ 2x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ x\le 4 \end{cases}$

$x\in[0, 4]$

16.2. $(30+x)(20+2x)\times10=16\,000$

$$\Leftrightarrow 600+60x+20x+2x^2=1600$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+80x-1000=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-80\pm\sqrt{6400+8000}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-80\pm120}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=10 \ \vee \ x=-50$$

Como x representa o comprimento, tem-se que $x\ge0$.

Logo, $x=10$.

3 Teste de Avaliação

pp. 18-20

Caderno 1

1. $a=2$ e $b=1$

$$\left]-\infty, 2a\right[\cap \left]-\frac{b}{2}, +\infty\right[= \left]-\infty, 4\right[\cap \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$= \left]-\frac{1}{2}, 4\right[$$

$[0, 1]\subset\left]-\frac{1}{2}, 4\right[$

Opção (B).

2.

2.1. $83\,000-80\,000=3000$

$\frac{3000}{500}=6$

O Presidente estava a contar com seis dias de atraso.

2.2. $V_{\text{estrutura}}=\frac{\pi\times2^2\times20}{3}-\frac{\pi\times1^2\times10}{3}=$

$$=\frac{\pi}{3}(80-10)=$$

$$=\frac{70}{3}\pi$$

$$\approx 23{,}3 \quad (1 \text{ c.d.})$$

Cálculo auxiliar

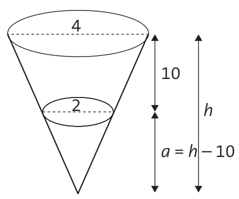
$\frac{4}{2}=\frac{h}{h-10} \Leftrightarrow 2h=4(h-10)$

$\Leftrightarrow 2h=4h-40$

$\Leftrightarrow -2h=-40$

$\Leftrightarrow h=20$

$a=h-10 \Leftrightarrow a=10$



A estrutura tem 23,3 m^3 de volume.

2.3. 475 ——— 48°

x ——— 360°

$x=\frac{475\times360}{48}$

$\Leftrightarrow x=3562{,}5$

$3562{,}5 \text{ cm}^2=0{,}35625 \text{ m}^2\approx0{,}4 \text{ m}^2 \quad (1 \text{ c.d.})$

A área total do círculo é 0,4 m^2.

3. $0{,}1\times50=5$; $0{,}2\times25=5$; $0{,}4\times12{,}5=5$; $0{,}8\times6{,}25=5$

Como o produto entre as grandezas é constante, estas dizem-se inversamente proporcionais.

Opção (A).

4.

4.1. $V_{\text{cubo}}=2^3=8 \text{ cm}^3$

$V_{\text{pirâmide}}=\frac{1}{3}\times(2\times2)\times h=$

$$=\frac{4}{3}\times h$$

Logo:

$V_{\text{cubo}}=V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\times h=8$

$$\Leftrightarrow h=8\times\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow h=6$$

A altura da pirâmide é 6 cm.

4.2. $\overline{BI} = \sqrt{10}$

$A = 4 \times \dfrac{3 \times 2}{2} + 2 \times 2 =$

$= 12 + 4 =$

$= 16$

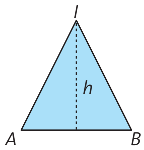
Cálculo auxiliar

$h^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

$\Leftrightarrow h^2 = 10 - 1$

$\Leftrightarrow h^2 = 9$

$\Leftrightarrow h = -3 \ \vee \ h = 3$



Como $h > 0$, vem que $h = 3$.

A área da superfície da pirâmide é 16 cm^2.

Caderno 2

5. Sejam x, y e z três números inteiros.

Sabemos que $x = 2y$ e que $z = y + 10$ e ainda que $x + y > z$. Então:

$x + y > z \Leftrightarrow 2y + y > y + 10$

$\Leftrightarrow 2y > 10$

$\Leftrightarrow y > 5$

Como $y > 5$ e $y < 7$, então $y = 6$.

Os três números são $x = 12$, $y = 6$ e $z = 16$.

---

6. $\dfrac{7}{2}x - 1 > k - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2}x > k - \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{2}{7}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$

Para que o conjunto-solução da inequação seja $]3, +\infty[$, tem-se que:

$\dfrac{2}{7}\left(k - \dfrac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow 2\left(k - \dfrac{1}{2}\right) = 21$

$\Leftrightarrow 2k - 1 = 21$

$\Leftrightarrow 2k = 22$

$\Leftrightarrow k = 11$

Logo, $k = 11$.

---

7. Para saber quanto vai pagar o Rui, basta determinar o preço de cada lápis e de cada esferográfica.

Seja l o preço de um lápis e e o preço de uma esferográfica.

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} 4l + 3e = 8{,}4 \\ 3l + 5e = 8{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4l = 8{,}4 - 3e \\ 3l + 5e = 8{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \dfrac{8{,}4 - 3e}{4} \\ 3\left(\dfrac{8{,}4 - 3e}{4}\right) + 5e = 8{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \dfrac{25{,}2 - 9e}{4} + \dfrac{20e}{4} = \dfrac{34}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 25{,}2 - 9e + 20e = 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 11e = 8{,}8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ e = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \dfrac{8{,}4 - 3 \times 0{,}8}{4} \\ e = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = 1{,}5 \\ e = 0{,}8 \end{cases}$$

Cada lápis custa 1,50 € e cada esferográfica custa 0,80 €. Assim, o Rui pagará 1,50 € + 0,80 € = 2,30 €.

---

8. $2(x - 2)^2 = (x - 2)(x + 2) \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 4) = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 - x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 6$

C.S. = $\{2, 6\}$

9.

9.1. O conjunto-solução da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$ é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e de g.

Como se sabe que os gráficos das funções f e g se intersetam apenas no ponto A de abcissa $\dfrac{1}{2}$, conclui-se que o conjunto-solução da equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$ é $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

9.2. Como a abcissa do ponto A é $\dfrac{1}{2}$, então a altura do triângulo $[OAB]$ é $\dfrac{1}{2}$.

Como $g(0) = 4 \times 0 - 1 = -1$, vem que $B(0, -1)$, donde $\overline{OB} = 1$.

Assim:

$A_{[OAB]} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$ u.a.

10.

10.1. $\dfrac{13}{0{,}5} \neq \dfrac{17}{1}$

Logo, o custo e o tempo de passeio não são diretamente proporcionais.

10.2.

10.2.1. $20 \times 30 = 600$, pelo que 600 é a constante de proporcionalidade inversa.

Então:

$10 \times a = 600 \Leftrightarrow a = 60$

$b \times 120 = 600 \Leftrightarrow b = 5$

10.2.2. Como se trata de uma função de proporcionalidade inversa e 600 é a constante de proporcionalidade inversa, $T = \dfrac{600}{n}$.

Opção (A).

10.3.

10.3.1. As retas *BF* e *EA* estão contidas no plano *ABF*, pelo que se exclui a opção (A).

Como a reta *EF* é perpendicular ao plano *ADE*, então é perpendicular a todas as retas contidas nesse plano que passem por *E*; em particular, é perpendicular a *AE*. Se *AE* // *BF*, então $AE \perp BF$. Neste caso, teríamos duas retas (*BF* e *GF*) concorrentes pertencentes ao plano *BFG*, perpendiculares à reta *EF*. Consequentemente, a reta *EF* seria perpendicular ao plano *BFG*. Como a reta *EF* não é perpendicular ao plano *BFG*, exclui-se a opção (B).

Se $AE \perp BF$, então *EF* e *BF* seriam coincidentes. Como tal não acontece, exclui-se a opção (C).

Opção (D).

10.3.2. O plano *EFG* contém uma reta *EF*, que é perpendicular ao plano *AEH*, pelo que o plano *EFG* é perpendicular ao plano *AEH*.

4 Teste de Avaliação

pp. 21-23

Caderno 1

1.

1.1. *BC* // *GF* e *GF* está contida no plano *GFN*. Donde, *BC* também é paralela ao plano *GFN*, pelo que a opção (A) é verdadeira.

A reta *BJ*, que está contida no plano *ABJ*, é perpendicular ao plano *IJK*.

Assim, os planos *ABJ* e *IJK* são perpendiculares, pelo que que a opção (B) é verdadeira.

A reta *LD* é perpendicular ao plano *ABC* e interseta-o no ponto *D*, pelo que *D* é a projeção ortogonal do ponto *L* no plano *ABC*. A opção (C) é verdadeira.

Opção (D).

1.2. Trata-se de um polígono com oito lados, logo:

$S_8 = (8 - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$

A soma das amplitudes dos ângulos internos do octógono é 1080°.

2.

2.1. $x \rightarrow$ número de professores acompanhantes

$y \rightarrow$ número de alunos

Como o número de professores é um quarto do números de alunos, vem que $x = \frac{y}{4}$.

$$3{,}5y + 5x < 300 \Leftrightarrow 3{,}5y + 5 \times \frac{y}{4} < 300$$
$$\Leftrightarrow 14y + 5y < 1200$$
$$\Leftrightarrow 19y < 1200$$
$$\Leftrightarrow y < \frac{1200}{19}$$

$\frac{1200}{19} \approx 63{,}2$ (1 c.d.)

$\frac{63{,}2}{4} = 15{,}8$

No máximo poderão estar 15 professores na visita e 60 alunos.

2.2.

2.2.1. diâmetro = 18 m

raio = 18 : 2 = 9 m

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \times 9^3 = 3 \times 4\pi \times 9^2 =$$
$$\approx 3053{,}6352 \quad \text{(4 c.d.)}$$

$$V_{\text{total}} = 6 \times 3053{,}6352$$
$$= 18\,321{,}8112$$
$$\approx 18\,321{,}8 \quad \text{(1 c.d.)}$$

O volume das esferas abertas ao público é 18 321,8 m³.

2.2.2. $A_{\odot} = 4\pi$

Logo, $r = 2$.

Então:

$$P_{\odot} = 2 \times \pi \times 2 =$$
$$= 12{,}5664$$

Tem-se que:

$$A_{\text{superfície}} = 12{,}5664 \times 35 =$$
$$= 439{,}824$$

$$3 \times A_{\text{superfície}} = 3 \times 439{,}824 =$$
$$= 1319{,}5 \quad \text{(1 c.d.)}$$

A área total da superfície a reparar é 1319,5 m².

3. A opção (B) é falsa porque o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo é independente da unidade de comprimento fixada.

A opção (C) é falsa porque um triângulo retângulo não pode ser equilátero.

A opção (D) é falsa porque o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que 1.

Opção (A).

4. Como a altura das torres é 114 m, então $\overline{DE} = 114$ m.

Sabe-se também que $\overline{EA} = 30$ m.

Assim:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{114}{30} \Leftrightarrow \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{114}{30}\right)$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 75^\circ \quad \text{(0 c.d.)}$$

A amplitude do ângulo α é 75°.

Caderno 2

5.

5.1. $x \rightarrow$ número de alunos

$$15x \geq 105 \Leftrightarrow x \geq \frac{105}{15}$$
$$\Leftrightarrow x \geq 7$$

O Afonso deve desafiar pelo menos seis amigos.

5.2. Trata-se de uma função de proporcionalidade direta, pelo que a sua representação gráfica é uma reta que passa pela origem.

Opção (A).

5.3.

5.3.1. O produto do número de valores pela duração da apresentação (em minutos) é constante e igual a 120, pelo que se trata de uma função de proporcionalidade inversa.

5.3.2. No contexto do problema, a constante de proporcionalidade inversa, 120 minutos, representa a duração da conferência.

6.

6.1. Como C pertence ao gráfico de g, então $C\left(x, \frac{3}{x}\right)$.

Por outro lado, como $[AC]$ e $[BC]$ são raios da circunferência de centro C, sabemos que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Então:

$$\frac{3}{x} = x \Leftrightarrow 3 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

Vem que $A(0, \sqrt{3})$ e $B(\sqrt{3}, 0)$, pois $x > 0$.

6.2. $g\left(\frac{1}{4}\right) = m \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{4}} = m$

$\Leftrightarrow m = 12$

---

7. Vamos começar por determinar o binómio discriminante:

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-4m)^2 - 4 \times 2 \times 2\,(m^2 + 1) =$$
$$= \cancel{16\,m^2} - \cancel{16m^2} - 16 =$$
$$= -16$$

Como $\triangle < 0$, conclui-se que a equação não tem nenhuma solução para qualquer valor de $m \in \mathbb{R}$.

8.

8.1. $(\tan^2\alpha + 1)(1 - \sin^2\alpha) =$

$= (\tan^2\alpha + 1) \times \cos^2\alpha =$

$= \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} \times \cancel{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha =$

$= \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= 1$, como queríamos demonstrar.

8.2.

8.2.1. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como α é um ângulo agudo, vem que $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Opção (C).

8.2.2. $\beta = 90° - \alpha$, pelo que $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Assim:

$$2\sin\beta - \cos^2\alpha = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{3}{4}$$

9.

9.1. Sabe-se que $[BD]$ é um diâmetro, logo $\overset{\frown}{BD} = 180°$.

Como o ângulo BAD é inscrito no arco BD, $B\hat{A}D = \frac{180°}{2} = 90°$.

9.2. $[AC]$ e $[DC]$ são raios da circunferência.

Como $\overline{AC} = 2$ cm, vem que $\overline{DC} = 2$ cm.

$[DA]$ e $[BE]$ são cordas compreendidas entre as retas DB e AE.

Como $DB \,//\, AE$, tem-se que $\overline{DA} = \overline{BE} = 2$ cm.

Assim:

$P_{[ADC]} = \overline{AC} + \overline{DC} + \overline{DA} = 2 + 2 + 2 = 6$ cm

9.3.

9.3.1. Como $B\hat{D}A = 60°$, então $A\hat{C}B = 120°$.

Tem-se que:

4π ——— $360°$

x ——— $120°$

$$x = \frac{120° \times 4\pi}{360°}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

Cálculo auxiliar

$P_{\odot} = 2\pi r$

$P_{\odot} = 2 \times \pi \times 2 =$

$= 4\pi r$

Opção (A).

9.3.2. Sabe-se que o ângulo BDA é inscrito no arco AB, pelo que $\overset{\frown}{AB} = 2 \times 60° = 120°$.

Tem-se que:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BP} + \overset{\frown}{PA} = 360° \Leftrightarrow 120° + 75° + \overset{\frown}{PA} = 360°$$
$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{PA} = 165°$$

5 Teste de Avaliação pp. 24-26

Caderno 1

1.

1.1.

1.1.1. $P = 4 \times \sqrt{45}$

$\approx 26{,}83$ cm (2 c.d.)

1.1.2. $A = 36 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = 36$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2x - 1) \times (-x + 3)}{2} = 36$$
$$\Leftrightarrow (-2x - 1) \times (-x + 3) = 72$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + x - 3 = 72$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 75 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-75)}}{2 \times 2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{625}}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 25}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = 7{,}5 \vee x = -5$$

Como $\overline{AC} > 0$ e $\overline{BD} > 0$, $x = -5$.

1.2. $A = 36 \Leftrightarrow \frac{d_1 \times d_2}{2} = 36$

$\Leftrightarrow d_1 \times d_2 = 72$

O produto das diagonais d_1 e d_2 é constante, logo, trata-se de uma relação de proporcionalidade inversa.

A expressão algébrica é $d_2 = \frac{72}{d_1}$.

1.3. Se a base é um losango desta família que tem os quatro ângulos iguais, trata-se de um quadrado de lado $\sqrt{36} = 6$ cm.

Seja h a altura da pirâmide.

Então:

$5^2 = h^2 + 32 \Leftrightarrow h^2 = 16$

$\Leftrightarrow h = 4$, porque $h > 0$.

Vem que:

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 36 \times 4 =$

$= \frac{144}{3} =$

$= 48 \text{ cm}^3$

2.

2.1. $P_{\odot} = 2\pi r$

$P_{\odot} = 2 \times \pi \times 12 = 24\pi$

24π ——— $360°$

x ——— $300°$

$x = \frac{24\pi \times 300°}{360°}$

$\Leftrightarrow x = 20\,\pi$

Opção (C).

2.2. $\pi \times 12^2$ ——— $360°$

x ——— $300°$

$x = \frac{300 \times 12^2\pi}{48}$

$\Leftrightarrow x = 120\,\pi$

3. Número de cápsulas vermelhas ou pretas: $20 + 10 = 30$

Número total de cápsulas: $20 + 10 + 12 = 42$

$P = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$

Opção (A).

Caderno 2

4.

4.1. 2 horas e 30 minutos = 2,5 h

$2{,}5 \times 22 = 55$

Pode percorrer 55 km.

4.2.

4.2.1. Seja x a altura do salto.

$\text{tg}(30°) = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \times \text{tg}(30°)$

$\Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

A altura do salto foi $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

4.2.2. $\text{tg}\,\alpha = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45°$

4.3.

4.3.1. f é uma função quadrática do tipo $y = ax^2$ e $A(2, -1)$ pertence ao gráfico de f.

Então:

$-1 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

Conclui-se que $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$, ou seja, $f(x) = -\frac{x^2}{4}$.

4.3.2. Sabe-se que $C(-2, y_C)$ pertence ao gráfico de f, donde:

$y_C = f(-2) = -\frac{(-2)^2}{4} = -1$

Logo, $C(-2, -1)$.

Por outro lado, $B(x_B, 0)$ pertence ao gráfico de g, donde:

$g(x_B) = 0 \Leftrightarrow x_B - 3 = 0 \Leftrightarrow x_B = 3$. Logo, $B(3, 0)$.

Assim:

$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times |y_C|}{2} =$

$= \frac{3 \times 1}{2} =$

$= \frac{3}{2}$ u.a.

5. Sabe-se que A e B são equiprováveis, pelo que $P(A) = P(B)$. Como a probabilidade de acontecer C é igual ao dobro da probabilidade de acontecer A, $P(C) = 2\,P(A)$.

Tem-se ainda que $P(C \cup D) = \frac{2}{3}$.

Como C e D são acontecimentos elementares distintos,

$P(C) + P(D) = \frac{2}{3}$, ou, de modo equivalente,

$P(D) = \frac{2}{3} - P(C)$.

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$

$\Leftrightarrow P(A) + P(A) + 2\,P(A) + \frac{2}{3} - 2\,P(A) = 1$

$\Leftrightarrow 2\,P(A) = 1 - \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 2\,P(A) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

Conclui-se que:

$P(B) = P(A) = \frac{1}{6}$; $P(C) = 2\,P(A) = \frac{1}{3}$; $P(D) = \frac{2}{3} - P(C) = \frac{1}{3}$

6.

6.1. Seja C o acontecimento "passarem férias no campo".

$P(C) = \frac{1}{3}$

6.2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

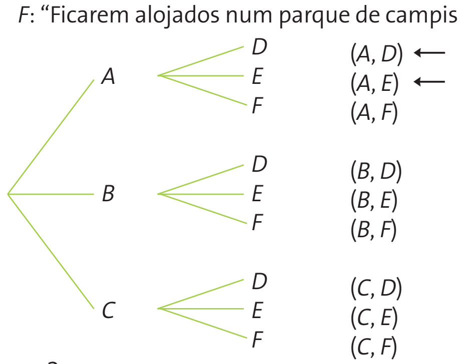
A: "Passarem férias na praia."

B: "Passarem férias numa capital europeia."

D: "Ficarem alojados num hotel."

E: "Ficarem alojados num apartamento."

F: "Ficarem alojados num parque de campismo."



$P = \frac{2}{9}$

A probabilidade de a opção da Maria ter sido a escolhida é $\frac{2}{9}$.

6.3.

6.3.1. A reta *FG* é perpendicular ao plano *ABF*, pelo que é perpendicular a todas as retas contidas nesse plano que passem por *F* e, em particular, a *AF*.

Assim, a opção (A) é verdadeira.

Se as retas *AB* e *FG* fossem complanares, então definiriam um único plano e o plano *ABF* e *BFG* seriam o mesmo, o que não se verifica.

Assim, a opção (B) é verdadeira.

A interseção do plano *DCG* com *ABC* é a reta *DC* e a interseção do plano *DCG* com o plano *FGI* é a reta *GJ*. Como as retas *DC* e *GJ* não são paralelas, podemos dizer que os planos *ABC* e *FGI* também não são paralelos.

Assim, a opção (C) é falsa.

Se o plano *FGI* não fosse concorrente com o plano *ADE*, então seriam paralelos. Desta forma, o plano *BCF* e *FGI* seriam o mesmo. Como isso não se verifica, a opção (D) é verdadeira.

Opção (C).

6.3.2. A afirmação é falsa. Uma vez que *BF* não é perpendicular a *FGI*, tem-se que *F* não é a projeção ortogonal de *B* em *FGI*. Logo, a distância entre o ponto *B* e o ponto *F* é superior a 4.

7.

7.1. $2 + 6 + 13 + 24 + 15 = 60$

Opção (D).

7.2. $24 + 15 = 39$

O Manuel teve pelo menos 15 visualizações durante 39 dias.

7.3. $\frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 25\%$

Em 25% dos dias, o Manuel teve 20 ou mais visualizações e menos de 25.

8. Como $A\hat{C}B = 60^{\circ}$, tem-se que $E\hat{C}D = 60^{\circ}$.

Ora, $E\hat{A}D = \frac{E\hat{C}D}{2} = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$.

Opção (B).

6 Teste de Avaliação pp. 27-29

Caderno 1

1.

1.1. O número de pombos e o número de dias para os quais a ração é suficiente são grandezas inversamente proporcionais.

$30 \times 40 = 1200 \longrightarrow$ constante de proporcionalidade inversa

Logo, $x \times 60 = 1200 \Leftrightarrow x = 20$.

A ração durará apenas 20 dias.

1.2. Seja x a distância do solo a que se encontram quando iniciam a descida.

$$\sin(15^{\circ}) = \frac{x-2}{10} \Leftrightarrow x - 2 = 10\sin(15^{\circ})$$
$$\Leftrightarrow x = 2 + 10\sin(15^{\circ})$$
$$\Leftrightarrow x \approx 4{,}6 \quad (1 \text{ c.d.})$$

Os pombos encontram-se a uma distância de 4,6 m.

2.

2.1. $V_{cone} = V_{copo}$

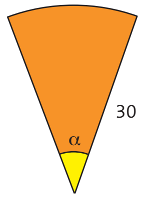
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\pi \times 3^2) \times h = (\pi \times 3^2) \times 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}h = 4$$
$$\Leftrightarrow h = 12$$

Cálculo auxiliar
Diâmetro = 6 m
Raio = 6 : 2 = 3 cm

A altura do cone é 12 cm.

2.2. $P_{base} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

Consideremos o setor circular da figura, que corresponde à superfície lateral do cone:



$2\pi \times 30$ ——— 360°

6π ——— α

$$\alpha = \frac{6\cancel{\pi} \times 360}{2\cancel{\pi} \times 30}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 36^{\circ}$$

Em seguida, vamos determinar a área pedida:

$\pi \times 30^2$ ——— 360°

x ——— 36°

$$x = \frac{\pi \times 30^2 \times 36^{\circ}}{360^{\circ}}$$
$$\Leftrightarrow x = 90\pi$$

A superfície lateral tem 90π cm^2 de área.

3.

3.1. *A* e *B* são acontecimentos tais que a sua interseção é o conjunto vazio e a união é o universo de resultados, logo são acontecimentos complementares.

Opção (B).

3.2. Sabe-se que $P(A) = \frac{2}{3}$.

Seja x o número total de fichas no saco.

$$P(A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{32}{x} = \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \times 32}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 48$$

Há 48 fichas no saco.

4. O plano mediador de um segmento de reta [*AB*] é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de *A* e *B*.

Opção (D).

Caderno 2

5.

5.1. $\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{ADC} = 360^{\circ} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CA} = 360^{\circ} - 240^{\circ}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{CA} = 120^{\circ}$

Como a reta *BD* passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a [*AC*], bisseta o arco $\overset{\frown}{AC}$. Logo, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$.

Então:

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 120^{\circ} \Leftrightarrow 2\,\overset{\frown}{AB} = 120^{\circ}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^{\circ}$

5.2. A circunferência é circunscrita ao triângulo [*ABD*], pelo que o seu centro é o circuncentro do triângulo.

Opção (A).

5.3. Sabe-se que $\overline{BD} = 70$ cm.

Como $\overset{\frown}{DC} = 120°$ e o ângulo DBC é inscrito no arco DC, vem que:

$$D\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Como $[DB]$ é um diâmetro da circunferência e o ângulo DCB é inscrito no arco DB, então o triângulo $[BCD]$ é retângulo em C.

Assim:

$$\cos D\hat{B}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \cos 60° = \frac{\overline{BC}}{70}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 70 \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 35 \text{ cm}$$

6.

6.1. $-3, -2, -1, 0, 1$

6.2. $4(x-1) \leq \frac{2x-2}{3} \Leftrightarrow 4x - 4 \leq \frac{2x-2}{3}$

$$\Leftrightarrow 12x - 12 \leq 2x - 2$$
$$\Leftrightarrow 12x - 2x \leq -2 + 12$$
$$\Leftrightarrow 10x \leq 10$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{10}{10}$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

C.S. $=]-\infty, 1] = C$

Conclui-se que C é o conjunto-solução da inequação dada.

7.

7.1. Um hexágono regular tem 6 lados, donde, a amplitude de cada um dos seus ângulos externos é $\frac{360°}{6} = 60°$.

7.2.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A			*i*	*d*	*i*	
B				*i*	*d*	*i*
C	*i*				*i*	*d*
D	*d*	*i*				*i*
E	*i*	*d*	*i*			
F		*i*	*d*	*i*		

$i \longrightarrow$ cor igual

$d \longrightarrow$ cor diferente

$$P = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

8.

8.1. Sabe-se que -2 é uma das soluções da equação, logo:

$$(-2)^2 + 3 \times (-2) + k + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 + k + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 1$$

Vamos descobrir a outra solução:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

A outra solução é -1.

8.2. Seja $k = \frac{5}{4}$:

$$x^2 + 3x + \frac{5}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times \frac{9}{4}}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

C.S. $= \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

9.

9.1. Como o ponto $T(9, 1)$ pertence ao gráfico de f, tem-se que:

$$f(9) = 1 \Leftrightarrow a \times 9^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{81}$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{81}x^2$.

Como $P(k, -k)$ pertence ao gráfico de f, $f(k) = -k$.

$$f(k) = -k \Leftrightarrow \frac{1}{81}k^2 = -k$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{81}k^2 + k = 0$$
$$\Leftrightarrow k\left(\frac{1}{81}k + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 0 \vee \frac{1}{81}k = -1$$
$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -81$$

Como $k \in \mathbb{R}^-$, vem que $k = -81$.

9.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 = 3x + 2$

$$\Leftrightarrow ax^2 - 3x - 2 = 0$$

Para que esta equação tenha apenas uma solução, o binómio discriminante tem que ser nulo:

$$b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \times a \times (-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 9 + 8a = 0$$
$$\Leftrightarrow 8a = -9$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{9}{8}$$

10. Os dados variam entre 7 (mínimo) e 34 (máximo), pelo que se excluem as opções (A) e (B). No intervalo $[0, 8[$ há apenas 2 dados, pelo que se exclui a opção (D).

Opção (C).

11. $\cos(x - 40°) = \sin\left(\frac{1}{2}(x + 20°)\right)$

$$\Leftrightarrow \sin(90° - x + 40°) = \sin\left(\frac{x}{2} + 10°\right)$$
$$\Leftrightarrow 130° - x = \frac{x}{2} + 10°$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3x}{2} = 10° - 130°$$
$$\Leftrightarrow -3x = -240°$$
$$\Leftrightarrow x = 80°$$

12. $a = \frac{2}{3}h \Leftrightarrow h = \frac{3}{2}a$

$$V_{\text{sólido}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} =$$
$$= 2 \times \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{3}{2}a =$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times a^3 =$$
$$= a^3$$

Opção (A).